LA SCOPERTA DEI PARADOSSI

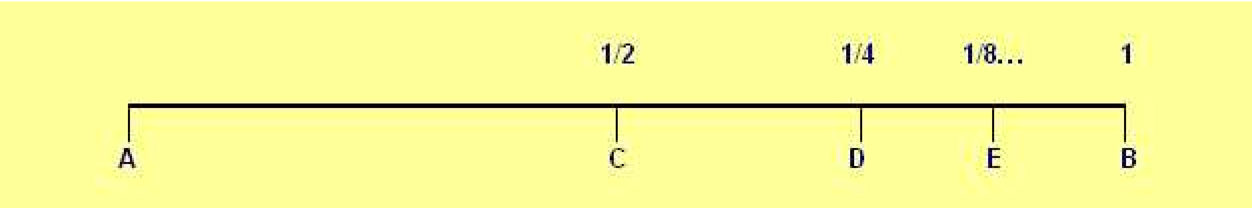
"*Questa è infatti la natura dei paradossi: spaventi improvvisi che nutrono, insieme al disagio delle culture, anche le barzellette sulla condizione umana. Sono esercizi di crudeltà, e la struttura dell'universo li approva.*"

Diego Gabutti.

I paradossi di Zenone

Immaginiamo un percorso lungo un chilometro, dal punto A al punto B. Immaginiamo poi un corridore - chiamiamolo Achille - che parte dal punto A e corre alla velocità uniforme di un metro al secondo verso il traguardo, cioè verso il punto B.

Achille deve dapprima coprire metà della distanza tra i punti A e B, raggiungendo il punto medio tra loro, che abbiamo indicato con C. Achille quindi deve percorrere metà della distanza che rimane tra C e il traguardo B, arrivando al punto D. Questo processo di dimezzamento continua all'infinito; infatti, indipendentemente da quanto piccola sia la distanza che rimane da coprire, essa può sempre essere divisa a metà. Inoltre, ogni segmento finito del percorso richiede una quantità finita di tempo per essere attraversato; dal momento che ci troviamo alle prese con un numero infinito di intervalli finiti, dobbiamo concludere che Achille non raggiungerà mai il traguardo. Cosa c'è di sbagliato nel ragionamento svolto in questo argomento?



La soluzione sembra indicare che Zenone si era sbagliato nel concepire le somme di serie infinite. Talune serie infinite, infatti, come l'insieme di tutti i numeri interi pari, non ammettono una somma: si può infatti aggiungere sempre un termine ulteriore e fare quindi crescere la somma all'infinito. Se prendiamo la serie infinita dei numeri interi pari (0+2+4+6+8+10+12...) possiamo sempre accrescere la somma finale aggiungendo un altro numero.

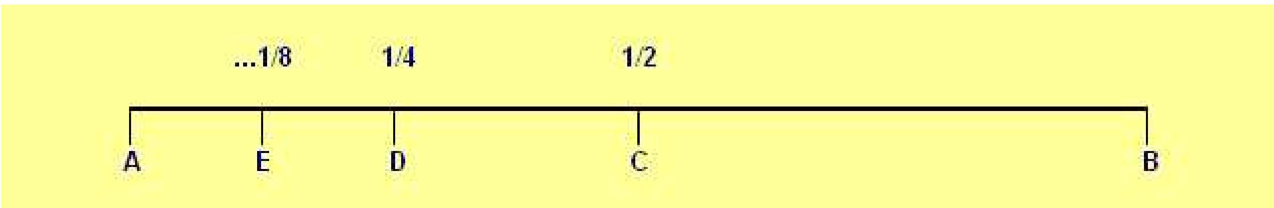
La serie infinita appena considerata è detta divergente, in quanto la sequenza delle sue somme parziali diverge. Una serie infinita divergente non ammette una somma.

Consideriamo ora la serie generata dal paradosso della corsa. Questa serie può essere rappresentata così:

1/2+1/4+1/8+1/16+1/32...

E' evidente che anche questa serie è infinita: infatti è sempre possibile aggiungere una frazione più piccola dimezzando la precedente. Tale serie infinita è detta convergente, in quanto la sequenza delle sue somme parziali converge. Il limite S della sequenza delle somme parziali viene detto somma della serie In questo caso è 1: infatti, più termini vengono aggiunti alla serie e più la somma si avvicina al limite 1.

Quindi, supponendo che si muova alla velocità uniforme di un metro al secondo, possiamo concludere che Achille percorrerà il chilometro del percorso in mille secondi. L'errore nel paradosso di Zenone consiste nell'idea che la somma di un numero infinito di intervalli finiti di spazio e di tempo debba essere infinita.



Il paradosso della corsa venne formulato anche in un'altra versione. Con questa seconda versione si cercava di mostrare come, per Achille, fosse addirittura impossibile iniziare la corsa.
Consideriamo il fatto che Achille deve dapprima raggiungere il punto medio (C) tra il punto di partenza (A) e l'arrivo (B). E, tuttavia, prima ancora, deve raggiungere il punto medio tra A e C, e così via, all'infinito.
Tra due punti qualunque, in un continuo, esiste sempre una infinità di punti. Achille, dunque, non può mai lasciare il punto di partenza, in quanto non esiste un punto immediatamente successivo. Siamo di fronte di nuovo alla medesima serie infinita e il limite è ancora è ancora 1.

Latino

Il metodo di Zenone venne poi ripreso nei momenti più diversi e dai personaggi più disparati.

Nel bel mezzo delle sue *Confessiones*, sant'Agostino utilizza il metodo zenoniano per argomentare che un secolo non è presente, perché stiamo vivendo in uno solo dei suoi anni; analogamente un anno non è presente perché siamo vivendo uno solo dei suoi mesi e via dicendo. Egli dedusse quindi che passato e futuro non esistono, e c'è solo il presente, che prende tre forme differenti: Presente del passato, Presente del presente e Presente del futuro. Infine il grande santo osserva che il presente del passato vive nella memoria e il presente del futuro nell'attesa.

Filosofia

Il metodo zenoniano diventa, con il passare del tempo, molto diffuso; perfino nella *Critica della ragion pura* di Kant è possibile riscontrarne tracce. In particolare la seconda antinomia della ragion pura mostra che il mondo non può essere né costituito di elementi atomici, né infinitamente divisibile. Da una parte la materia ha estensione spaziale ed è quindi soggetta all'infinita divisibilità dello spazio stesso, dall'altra l'infinita divisibilità porta ad un regresso all'infinito, al termine del quale tutto si disgrega e perde di significato.

Il grande filosofo ritenne di poter ricavare da questa antinomia che *la nozione di mondo è illegittima*, infatti l'intelletto ne percepisce la finitezza come una limitazione inadeguata, tuttavia non può concepire l'infinitezza in maniera comprensibile.

Letteratura

Nel 1895 uscì un divertente saggio ad opera di Lewis Carroll dal titolo "Ciò che la tartaruga disse ad Achille". In queste pagine lo scrittore inglese immaginò di cogliere le parole che si scambiarono i due contendenti alla fine della gara. Fra battute scherzose e immaginando già personaggi e matematici futuri la tartaruga dimostra ad Achille, facendo uso dei metodi eleatici che non sono possibili i sillogismi, in altre parole che non è possibile partire da alcune premesse e dedurne immediatamente altre in mancanza di una regola precisa che ci autorizzi a farlo. La novità dell'argomento di Carroll sta nel fatto che lo scrittore mostra in maniera efficace la distinzione tra implicazione linguistica e deduzione metalinguistica. Detto più semplicemente, l'argomento mostrava per la prima volta la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio, conquista assodata della logica moderna.

Jorge Luis Borges ha tratto dai paradossi di Zenone, sia le basi del suo pensiero su temi quali il tempo, l'infinito, la realtà, che lo spunto per la costruzione di alcune inquietanti situazioni. Egli dedicò a questi paradossi diversi interessanti saggi, nei quali asserì che questa corsa era la prova definitiva che smaschera il carattere allucinatorio del mondo. Ecco un brano tratto da La perpetua corsa di *Achille e la tartaruga*:

Noi (la indivisa totalità che opera in noi) abbiamo sognato il mondo. Lo abbiamo sognato resistente, misterioso, visibile, ubiquo nello spazio e fermo nel tempo; ma abbiamo ammesso nella sua architettura tenui interstizi di assurdità, per sapere che è finto.

Due sono i brani inquietanti che potremmo vedere ad esemplificazione di questo; uno è tratto da *La morte e la bussola*, l'altro da *La scrittura del Dio*.

Nel primo un detective riesce a prevedere l'ultimo delitto di una serie, ma recatosi sul posto scopre che, in realtà era una trappola per lui.

Nel secondo, ancora più angoscioso, la realtà è descritta come un insieme di sogni, l'uno interno all'altro. E più ci si sveglia più si rischia di essere soffocati. *La strada che dovrai percorrere all'indietro è interminabile e morrai prima di esserti veramente destato.*

Arte

Fra gli artisti che utilizzarono schemi matematici per realizzare le loro opere spicca la figura di Escher. Maurits Cornelis Escher nasce a Leeuwarden, Olanda, nel 1898. […] Ma la passione naturale di questo artista per i paradossi giunge a concepire immagini impensate, anche senza un preciso "sottofondo matematico".

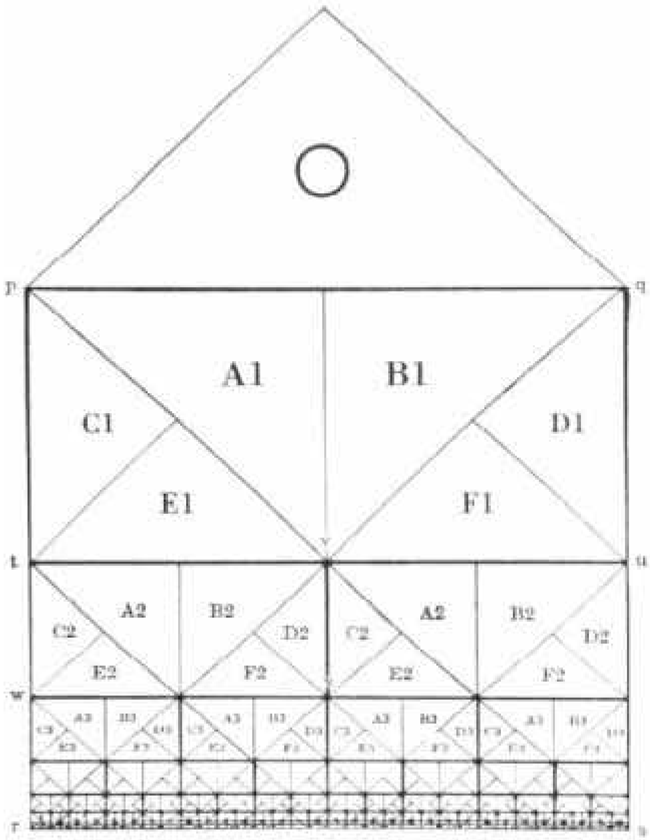
Nella litografia del 1958, chiamata ***Belvedere***, possiamo osservare richiami all'architettura rinascimentale italiana. Anche il titolo dell'opera non è certo casuale, infatti questa struttura permette osservazioni veramente "ardite", sottolineate dalla posizione dei due individui che osservano dalle sue balconate; la dama al piano di sopra sembra osservare attraverso la facciata principale in una direzione ma l'uomo al piano di sotto pare osservare, in tutt'altra direzione, attraverso la medesima facciata. Altro elemento "fuori dal normale" è la scala a pioli. Al piano di sotto appare interna all'edificio, salvo poi appoggiarsi alla balconata esterna del piano superiore. Per convincersi dell'impossibilità di costruire tale edificio è sufficiente osservare le colonne del piano inferiore, sembrano incrociarsi e compiere delle pericolose pieghe. Dopo il soggiorno in Spagna, affascinato dalle decorazioni dell'Alhambra di Granada, egli intraprese lunghe ricerche nel campo delle tassellazioni, della possibilità, cioè, di ricoprire una superficie piana con figure o gruppi di figure senza lasciare spazi liberi.

I risultati furono sorprendenti. Prima si cimentò con figure diverse, col solo intento di ricoprire una maggior estensione possibile, poi passò a realizzare tassellazioni sempre più regolari e con il minor numero di figu re. A ques to punto un ulteriore interesse lo colpì ed egli cercò, attraverso le tassellazioni di rappresentare un concetto difficile, anzi, impossibile: l'infinito.

Per rappresentare l'infinito egli pensò di variare non solo i contorni delle figure rappresentate ma anche le dimensioni. La cosa lo soddisfò decisamente. Infatti dopo aver compiuto diversi studi arrivò a realizzare tutta una serie di opere denominate "limite del quadrato".

Questo è uno dei suoi primi studi. Apparentemente non soddisfa un modello matematico ben preciso. In realtà non è così. Infatti a questo studio soggiace lo schema seguente. Anche aiutandoci con questa ulteriore schematizzazione potrebbero sfuggirci i legami con il paradosso di Achille e la Tartaruga o con i metodi eleatici.

Ma dopo un’osservazione attenta essi non potranno fare altro che rivelarsi in tutta la loro chiarezza. Se noi studiamo la lunghezza dei lati C1, C2, C3 e così via ci accorgiamo che la loro lunghezza non si riduce in modo casuale. Escher riduce le loro dimensioni secondo i valori successivi della serie che è stata studiata da Gregorio da San Vincenzo per risolvere il primo dei paradossi di Zenone, ottenendo così effettivamente una rappresentazione dell’infinito. Egli fu decisamente soddisfatto tanto che quella del “Limite del Quadrato”, fu una delle serie più replicate.



In seguito egli ricevette il contributo di un altro grande matematico, Henry Poincarè che stava sviluppando in quel momento la geometria iperbolica. Questo lo portò a trasferire la ricerca dell’infinito non solo sul quadrato ma anche sulla circonferenza. I risultati furono ancora una volta veramente notevoli.

L’esempio più grande è questo “Limite del Cerchio IV” chiamato anche Angeli e Diavoli.

Alla fine di questa breve trattazione potremmo fare diverse riflessioni ma forse è sufficiente osservare che spesso le crisi dei paradigmi e le scintille per le rivoluzioni matematiche e logiche sono innescate e stimolate dai paradossi. Al loro apparire provocano tragedie personali e collettive ma, col passare del tempo, magari anche millenni, essi finiscono per essere integrati nel corpo della scienza, non di rado occupandone una posizione di rilievo.

Di sicuro è nell'abisso dei paradossi che si riflette, come in uno specchio crepato, la complessità e inafferrabilità del mondo.